

Etude numérique sur l'interaction résonante entre des vagues d'amplitude finie*

Hiroshi TOMITA**

Résumé: Le transfert d'énergie entre des composantes de la vague à deux dimensions est examiné numériquement par l'équation de Zakharov. Cette équation est obtenue par une perturbation singulière valable jusqu'au troisième ordre de la cambrure. Elle prend en compte des composantes des vagues avançant dans une direction arbitraire et décrit la variation de leurs amplitudes modulées sur une longue durée. Les calculs sont exécutés dans le cas de résonance entre trois vagues, deux d'entre elles se rencontrant à angle droit. Sur une durée longue, la variation temporelle de l'amplitude de la troisième vague fait apparaître un phénomène de récurrence. Son amplitude maximale et sa période de récurrence dépendent non seulement du rapport des nombre d'ondes des deux vagues principales, mais aussi de leurs amplitudes. Les valeurs théoriques sont comparées avec les résultats d'une expérience dans un bassin d'essais. La concordance observée confirme la validité de l'équation utilisée en tant que la cambrure est petite. L'instabilité de la vague de Stokes est examinée par la même équation en deux dimensions. La région d'instabilité est déterminée. Le résultat est comparé avec celui obtenu par une autre théorie précédente et quelques remarques sont faites.

1. Introduction

En général, la cote de la surface de mer varie toujours de manière stochastique. Ses caractéristiques étant trop compliquées pour être analysées directement, on adopte spécialement le concept statistique de spectre de la vague pour décrire son état. Ce concept suppose la linéarité de la vague, c'est-à-dire que sa hauteur est suffisamment petite par rapport à sa longueur quand la profondeur de la mer est considérée infinie.

Depuis un quart de siècle, l'étude sur la vague non-linéaire a beaucoup progressé. Parmi les recherches dans ce domaine, PHILLIPS (1960) est ce qui a trait à notre sujet. Il a étudié pour la première fois l'interaction entre trois vagues nonlinéaires. En 1962, LONGUET-HIGGINS a présenté une méthode pour résoudre les équations de la vague en surface. Bien que la solution qu'il propose soit singulière du point de vue mathématique, elle joue un rôle important dans la recherche de la naissance d'une troisième vague, lorsque deux vagues se rencontrent à un certain angle. En 1966, LONGUET-HIGGINS et

SMITH d'une part, MCGOLDRICK *et al.* d'autre part, ont fait des expériences pour vérifier la théorie de LONGUET-HIGGINS dans un petit bassin (3m x 3m). L'interaction entre les vagues y avait bien lieu, indiquant qu'elle peut exister aussi en mer. Mais, leurs expériences ne portent que sur des durées courtes. Ils ont seulement observé le stade initial d'interaction.

Récemment, nous avons fait une expérience dans le même but, mais en utilisant un bassin plus large (TOMITA et SAWADA, 1986), de forme carrée (80 m x 80 m) appartenant à l'Institut de Recherche Navale à Tokyo. A l'échelle de cette installation, on peut mesurer le phénomène pendant une longue durée. Cependant la théorie proposée par LONGUET-HIGGINS est seulement valable pour temps court. Sa solution devient infinie avec le temps. Il faut donc définir une équation valable dans un domaine plus large. Il s'agit de l'équation de ZAKHAROV (1968) qui décrit la lente variation de l'amplitude de la vague dans une région étendue. C'est une sorte d'équation intégrodifférentielle qu'il est difficile d'exploiter directement. CRAWFORD *et al.* (1981b) ont utilisé cette équation pour évaluer le phénomène de dispersion dans un système de vagues se

* Manuscrit reçu le 8 avril 1987

** Institut de Recherche Navale, Shinkawa 6-38-1, Mitaka, Tokyo, 181 Japon

propageant dans une direction. OKAMURA (1984, 1985) a fait des calculs sur l'instabilité du clapotis en une et deux dimensions horizontales. CRAWFORD *et al.* (1981a) et STIASSNIE et SHEMER (1984) en plus ont utilisé une méthode numérique pour définir les caractéristiques de la vague avançant monochromatiquement (la vague de Stokes).

Dans le présent article, nous nous proposons de résoudre l'équation de Zakharov dans le cas du croisement de trois vagues de directions différentes. Une des trois vagues n'existe pas au stade initial, mais elle se produit par l'énergie des autres et s'accroît avec le temps. Il convient de noter que ce phénomène ressemble à l'interaction des oscillations non-linéaires dans la mécanique statistique d'après FORD et WATERS (1963).

A la fin, nous discutons l'instabilité d'un train de vagues par la perturbation des deux autres composantes. Elle contient, comme cas spécial, celle d'après Benjamine-Feir.

2. Equation fondamentale

L'équation (1) donne la forme de l'équation de Zakharov, modifiée par CRAWFORD *et al.* (1981a). La dénivellation de la surface η est représentée par l'amplitude complexe $B(\mathbf{K})$ comme l'indique l'équation (2):

$$i \frac{dB}{dt} = \iiint_{-\infty}^{\infty} T(\mathbf{K}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3) \delta(\mathbf{K} + \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_3) \times e^{i(\Omega + \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_3)t} B_1^* B_2 B_3 d\mathbf{K}_1 d\mathbf{K}_2 d\mathbf{K}_3, \quad (1)$$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{K/2\Omega} \{ B(\mathbf{K}, t) e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} - \Omega t)} + c.c. \} d\mathbf{K}, \quad (2)$$

$$|B(\mathbf{K})| = \pi \left(\frac{2\Omega}{K} \right)^{1/2} A(\mathbf{K}), \quad (3)$$

où $\Omega^2 = gK$, δ est la fonction delta de Dirac, et c.c. signifie le complexe conjugué du terme précédent.

Le noyau T de l'intégrale (1) est estimée à partir d'une formule dans leur article qui se reproduit en appendice A après quelques corrections. Les valeurs numériques de $T(i, j, k, l)$ sont données aussi en appendice A, avec $K_1 = 3,920$ et $K_2 = 1,205$ (Les longueurs des vagues sont respectivement

$\lambda_1 = 1,60$ m et $\lambda_2 = 5,21$ m). La quantité $A(\mathbf{K})$ représente l'amplitude ordinaire à mesurer et intervient dans $B(\mathbf{K})$ selon la formule (3). L'expression du noyau de l'intégrale est très compliquée et n'a jamais été appliquée de manière concrète sauf pour les cas à une dimension. Grâce aux résultats donnés par LONGUET-HIGGINS (1962) et LONGUET-HIGGINS et PHILLIPS (1962) pour l'interaction entre deux ou trois composantes, la présente théorie sera comparée avec leurs théories. Elles sont équivalentes au stade initial, ce qui est expliqué en appendice B. Pour faire les calculs, une situation simplifiée est supposée comme suit: une vague à nombre d'onde \mathbf{K}_1 se propage dans la direction X et la deuxième à nombre d'onde \mathbf{K}_2 avance dans la direction Y. Elles se rencontrent en angle droit. Elles donnent naissance à une troisième composante \mathbf{K}_3 . La relation entre les vecteurs \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 et \mathbf{K}_3 est dessinée dans la Fig. 1. Elle s'exprime par le système d'équations suivant:

$$i \frac{dB_1}{dt} = [T_{1111} B_1 B_1^* + \tilde{T}_{1221} B_2 B_2^* + \tilde{T}_{1331} B_3 B_3^*] B_1 + (T_{1123} + T_{1132}) e^{i\Delta\Omega_{1123}t} B_1^* B_2 B_3, \quad (4-a)$$

$$i \frac{dB_2}{dt} = [\tilde{T}_{2112} B_1 B_1^* + T_{2222} B_2 B_2^* + \tilde{T}_{2332} B_3 B_3^*] \times B_2 + T_{2311} e^{i\Delta\Omega_{2311}t} B_3^* B_1 B_1, \quad (4-b)$$

$$i \frac{dB_3}{dt} = [\tilde{T}_{3113} B_1 B_1^* + \tilde{T}_{3223} B_2 B_2^* + T_{3333} B_3 B_3^*] \times B_3 + T_{3211} e^{i\Delta\Omega_{3211}t} B_2^* B_1 B_1, \quad (4-c)$$

où $\tilde{T}_{jkkj} = T_{jkkj} + T_{jjkk}$, et $\Delta\Omega_{ijkl} = \Omega_i + \Omega_j - \Omega_k - \Omega_l$, T_{ijkl} étant l'abréviation de $T(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_l)$.

Ce sont des équations différentielles ordinaires que l'on peut traiter de manière générale par l'analyse numérique. A noter que ces équations

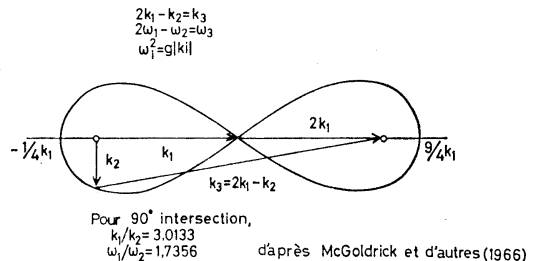


Fig. 1. Espace des vecteurs \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 et \mathbf{K}_3 .

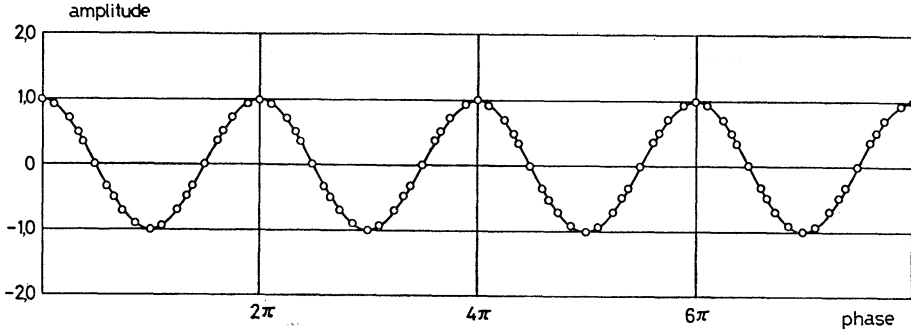


Fig. 2. Comparaison de la solution numérique (courbe solide) avec la solution exacte (cercles).

ont trois quantités conservatrices (l'intégrale première), qui sont:

$$C_1 = \frac{|B_1|^2}{T_{1123} + T_{1132}} + \frac{|B_2|^2}{T_{2311}}, \quad C_2 = \frac{|B_1|^2}{T_{1123} + T_{1132}} + \frac{|B_3|^2}{T_{3211}}, \quad C_3 = |B_2|^2 - |B_3|^2. \quad (5)$$

3. Méthode de l'expérience numérique

La méthode de Heun, qui utilise un prédicteur et un correcteur pour obtenir une meilleure convergence, s'applique à l'équation en forme générale:

$$\frac{dX}{dt} = X' = f(t, X). \quad (6)$$

Le prédicteur P est obtenu par les formules:

$$P_{n+1} = X_{n-1} + 2\Delta t X'_n, \\ P'_{n+1} = f(t_{n+1}, P_{n+1}). \quad (7)$$

Ensuite, une correction est faite pour calculer la valeur de C'_n , appelé le correcteur de la solution:

$$C'_{n+1} = \frac{P'_{n+1} + X'_n}{2} \quad (8)$$

Enfin, une nouvelle valeur X_{n+1} obtenue en utilisant X_n et X'_{n-1} s'écrit:

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t C'_{n+1}. \quad (9)$$

L'accroissement de temps Δt est choisi de 0,05 à 0,2 dans tous les calculs. Pour vérifier la précision de la méthode, le calcul est exécuté sur l'exemple très simple de l'oscillateur harmonique. La comparaison avec la courbe exacte est montrée dans la Fig. 2. La coïncidence est satisfaisante.

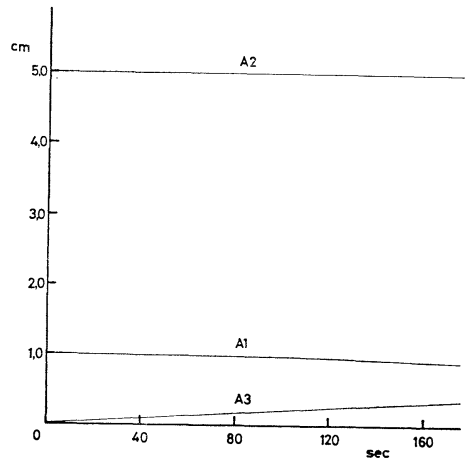


Fig. 3. Amplitude en fonction de temps: $R=3,01$.

Dans tous les calculs, les quantités C_1 , C_2 et C_3 sont aussi vérifiées comme constantes pour estimer la précision des calculs.

4. Résultats des calculs

[1] Interaction entre trois vagues

Au début, nous considérons le cas où seuls les composantes K_1 et K_2 existent, sans K_3 . Il faut chercher la solution des équations quand les valeurs initiales de $B(K)$, c'est-à-dire $B(K_1)$, $B(K_2)$ et $B(K_3)$ au temps $t=0$ prennent respectivement les valeurs B_1 , B_2 et 0. Un premier exemple d'analyse ($\lambda_1=1,73$ m, $\lambda_2=5,21$ m) est donné dans la Fig. 3. Le rapport de K_1 à K_2 est de 3,012, bien que les condition $K_3=2K_1 - K_2$ et $\Omega_3=2\Omega_1 - \Omega_2$ (condition de résonance) se réalisent simultanément. Si les amplitudes des vagues K_1 et K_2 sont suffisamment petites ($A_1=1$ cm, $A_2=5$ cm), il faut plus de 160 secondes pour le développement de la vague K_3 ,

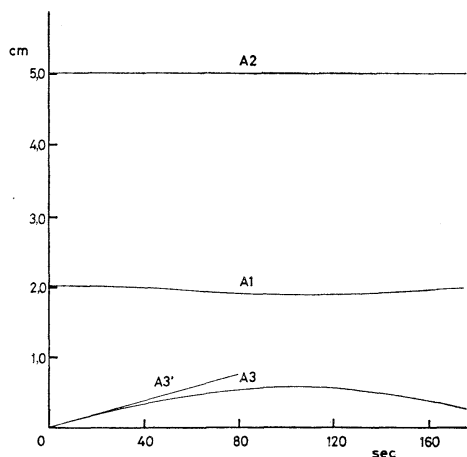


Fig. 4. Amplitude en fonction de temps: $R=3,01$, la récurrence apparaît. La ligne $A3'$ représente la solution classique.

ce qui concorde avec la théorie de Longuet-Higgins. Comme deuxième exemple, l'amplitude A_1 est augmentée un peu à 2 cm. Le résultat est montré dans la Fig. 4. L'amplitude de la vague K_3 augmente pendant les 110 premières secondes, mais, après une durée d'interaction assez longue, la tendance du développement de la vague K_3 diffère. Elle diminue lentement jusqu'à 0 pour revenir à l'état initial, et puis repartir. Il y a une sorte de phénomène de récurrence, comme indiqué par l'article précité de FORD et WATERS (1963). La relation entre la variation de A_3 et les amplitudes des vagues A_1 et A_2 suggère que la dispersion joue un rôle important dans le développement de la troisième vague. Le maximum de l'amplitude de K_3 (c'est-à-dire A_3) dépend de la valeur A_2 , alors que la période de récurrence est entièrement déterminée par A_1 . Cela ne peut pas être prévu par une analyse ou une expérience sur une courte durée. L'effet de résonance diminue quand les phases des vagues suivent une dispersion non-linéaire ce qui se produit pour grands A_1 et A_2 . La solution classique de Longuet-Higgins est donnée par la formule suivante:

$$|\eta| = A_3 = (A_1 \cdot K_1)^2 (A_2 \cdot K_2) \frac{gF}{2\Omega_1} t, \quad (10)$$

où $F=0,312$ dans cette condition. Elle doit justement être une tangente de notre solution au temps $t=0$, dont la courbe est également

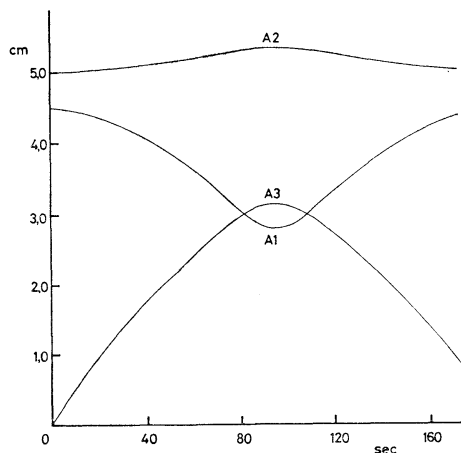


Fig. 5. Solution des amplitudes: $R=3,24$.

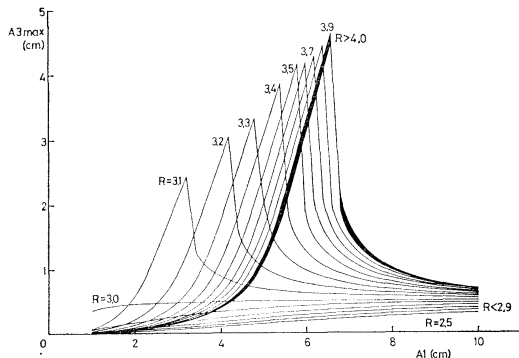


Fig. 6. Maximums d'amplitude A_3 par rapport à A_1 quand $A_2=5$ cm.

figurée. On trouve que le transfert d'énergie à la troisième vague K_3 n'est pas si grand dans la condition de $K_1/K_2=3,012$, même quand A_1 est plus grand. Les première et deuxième vagues K_1 et K_2 d'amplitude $A_1=4$ cm et $A_2=5$ cm, élèvent la troisième A_3 jusqu'à un maximum de 0,5 cm. Le résultat est assez différent si $K_1/K_2=3,24$ ($\lambda_1=1,61$ m, $\lambda_2=5,21$ m). Un résultat est montré dans la Fig. 5. Après 100 secondes la troisième vague atteint une amplitude de plus de 3 cm, supérieure à celle de la première. Dans ce cas, la condition de résonance n'est pas satisfaite, mais il semble que l'effet de la dispersion non-linéaire intervienne d'une manière parfaite. La période de récurrence augmente avec A_1 par rapport aux exemples ci-dessus. La Fig. 6 illustre la dépendance du maximum de A_3 sur la valeur A_1 , quand la

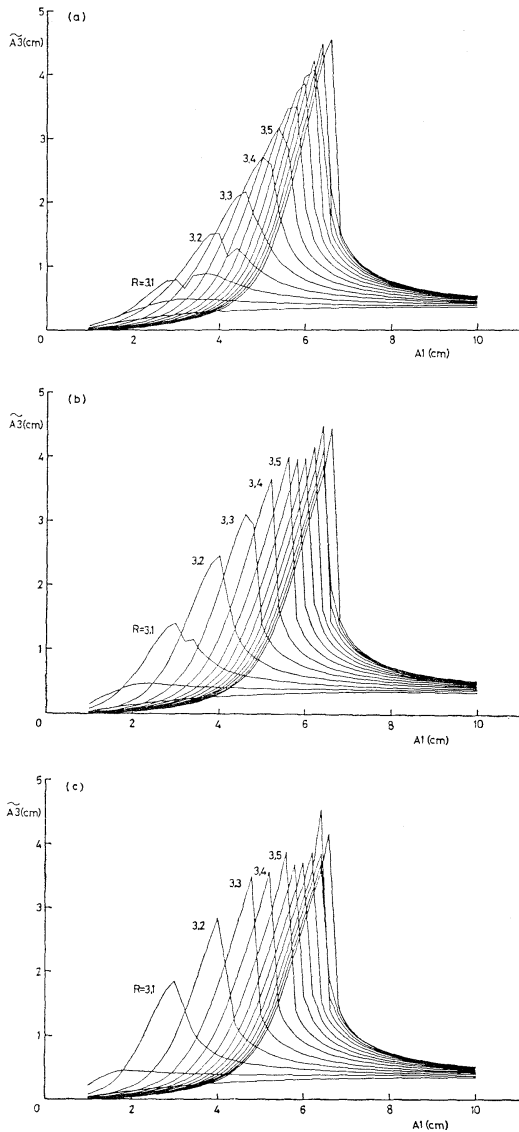


Fig. 7. Valeurs A_3 converties en valeurs d'observation à chaque position. (a) 20 m, (b) 40 m, (c) 60 m à la distance du générateur.

valeur A_2 est fixée à 5 cm. Chaque courbe correspond à une valeur de $R = K_1/K_2$ ($2,5 < R < 5,0$). Elle change sa forme entre les valeurs $R = 3,0$ et $3,1$. Jusqu'à $R = 3,0$, l'amplitude maximum augmente de forme monotone en fonction de A_1 et de R . Dans la région intermédiaire ($3,0 < R < 4,0$), elles atteignent un sommet. Plus la valeur R est grande plus les sommets se rapprochent. Le sommet augmente

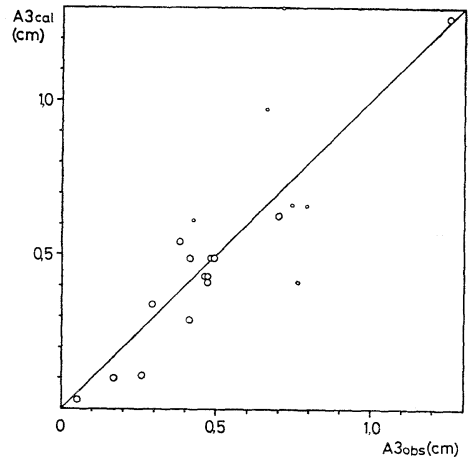


Fig. 8. Comparaison de la valeur entre la théorie et l'expérience. $A_2 \cong 10$ cm (petits cercle), $A_2 \cong 5$ cm (grands cercles).

jusqu'à la limite de la vague qui se brise du fait de l'instabilité de gravité terrestre et pourtant, il n'est pas possible qu'elle arrive à une grande valeur, car l'équation elle-même n'est pas valable à une telle cambrure. Dans la dernière région ($4,0 < R$), les courbes ont à peu près presque toujours la même forme. Mais, il est bien vérifié qu'un grand transfert d'énergie entre des vagues par interaction mutuelle existe dans des conditions bien définies. La Fig. 7 montre les valeurs théoriques de A_3 à quelques positions dans le bassin. Ces figures permettent de comparer les résultats théoriques et expérimentaux comme dans la Fig. 8. Il convient de noter que les calculs sont faits dans le cas homogène, alors que, les expériences sont exécutées dans le cas stationnaire. Il est nécessaire de faire une transformation $x = C_g t$, où C_g signifie la vitesse de groupe de la vague A_3 . Cela étant fait, la concordance est satisfaisante quand les amplitudes sont relativement petites, surtout, dans le cas où A_2 est égal à 5 cm (montré par de grands cercles). Etant donné que l'équation (1) a le caractère de ressemblance spatiale, ces résultats auront bien lieu dans de grandes envergures observées en la mer.

[2] Instabilité d'un train de vague

PHILLIPS (1967) a discuté un peu la relation entre des expériences d'interaction et la théorie d'instabilité d'après BENJAMIN et FEIR (1967).

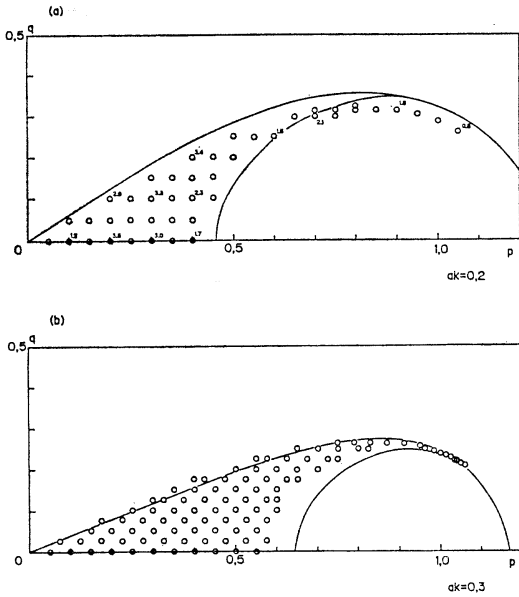


Fig. 9. Région d'instabilité dans le domaine de nombre d'onde. $\mathbf{K}_1 = K_1(1, 0)$, $\mathbf{K}_2 = K_1(1 + p, q)$, $\mathbf{K}_3 = K_1(1 - p, -q)$. (a) $ak=0, 2$, (b) $ak=0, 3$. Des cercles montrent les combinaisons (p, q) où le train de vague est instable. Les nombres à côté de cercles dans la figure (a) représentent les maximums d'amplitude de la perturbation A_2 quand l'amplitude de train A_1 est de 5 cm au début.

Mais, sa discussion n'a pas été suffisamment précise. Si les amplitudes des deux composantes B_2 et B_3 sont suffisamment petites (mais non nulles) par rapport à B_1 , les équations (4-b) et (4-c) sont linéarisées sur B_2 et B_3 . Ces équations se réduisent aux suivantes:

$$i \frac{dB_2}{dt} = \tilde{T}_{2112} B_1 B_1^* B_2 + T_{2311} e^{i\Delta\Omega} B_3^* B_1 B_1, \quad (11-a)$$

$$i \frac{dB_3}{dt} = \tilde{T}_{3113} B_1 B_1^* B_3 + T_{3211} e^{i\Delta\Omega} B_2^* B_1 B_1. \quad (11-b)$$

Les calculs sont effectués d'abord par les équations (4-a, b, c) entières avant quelques remarques théoriques sur les équations (11-a, b) simplifiées. C'est la même configuration que celle d'interaction, sauf qu'il y a une seule vague de grande amplitude au temps $t=0$. Si les deux autres vagues avancent, sous la restriction $2\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2$

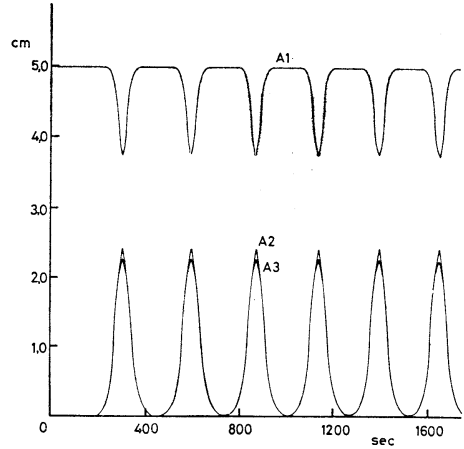


Fig. 10. Exemple d'instabilité du train de vague. $ak=0, 2$, $p=0, 125$, $q=0, 0$.

$= \mathbf{K}_3$ dans la même direction que la première, la situation est équivalente au problème étudié précisément par BENJAMIN et FEIR (1967). Leur analyse est exacte pour de petites perturbations, mais si elles ne sont pas petites, on doit utiliser l'équation de NLS (Non Linear Schrödinger) qui est une forme spéciale de celle de Zakharov. Donc, l'équation (4-a, b, c) permet d'examiner la propriété de la vague pour des perturbations à direction et amplitude arbitraires. Des calculs sont faits pour chercher dans quelle région d'espace du vecteur (p, q) a lieu l'instabilité du train de vague avec les conditions initiales $A_1 = 5$ cm et $7,5$ cm, $K_1 = 0,04$ cm^{-1} , c'est-à-dire, $A_1 K_1 = 0,2$ et $0,3$, où (p, q) est un vecteur de relatif entre K_1 et autres, $\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_3 = K_1(p, q)$. Les amplitudes d'une paire de perturbations sont mises à $10^{-6} A_1$ (le niveau de bruit). Le résultat est montré dans la Fig. 9 avec ceux de MCLEAN (1982), obtenus par l'analyse d'instabilité linéaire d'équation exacte. La Fig. 10 donne quelques exemples de la variation de la vague principale A_1 et des perturbations A_2, A_3 dans le temps.

Enfin, il convient de faire la remarque de la relation entre la méthode ci-dessus et celle de Benjamin. La substitution $B_1 = b_1 e^{-i T_{1111} b_1^2 t}$ dans l'équation (11-a, b) donne le taux d'accroissement: $f = \left[\frac{1}{Q^2} \left\{ T_{2311} T_{3211} b_1^4 - \left((T_{2112} + T_{3113}) b_1^2 - \frac{\mathcal{A}'}{2} \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}$, où $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + 2T_{1111} b_1^2$. L'approximation $T_{ijkl} = T_{1111} = -\frac{K^3}{4\pi^2}$, et $b_1^2 = \pi^2 \left(\frac{2\Omega}{K} \right) a^2$, donne une for-

mule $f^2 = \frac{1}{4\Omega^2} (2\Omega a^2 K^2 A - A^2)$, qui permet d'obtenir, à l'aide du caractère $\delta^2 = A/\Omega$, $f = -\frac{\delta}{2} \times \sqrt{2a^2 K^2 - \delta^2}$, qui est justement la formule par la théorie de Benjamin-Feir.

5. Conclusion

Des analyses numériques de l'interaction entre des vagues non-linéaires ont été exécutées sur la base de l'équation de Zakharov. L'évolution de la troisième vague A_3 par les deux autres A_1 et A_2 a été examinée sur une durée longue. Elle augmente pendant le premier stade, se rapproche de son maximum et revient vers l'état initial, suivie de phénomènes de récurrence. Le maximum et la période de récurrence dépendent des quantités A_1 , A_2 et R . Le résultat théorique s'accorde d'une manière satisfaisante avec le résultat expérimental dans le bassin. Mais, il est difficile de conclure que les résultats précédents existent quand même pour de grandes cambrures de la vague. Il serait nécessaire de comparer ces valeurs les unes avec les autres, quand le transfert des énergies apparaît plus fort. Nous ferons des expériences dans notre bassin à cette condition dans un futur proche.

Le problème d'instabilité d'un train de vague a été examiné directement par la méthode numérique avec quelques remarques. L'intérêt particulier porte sur la relation entre la théorie proposée dans cet article et celle de Benjamin-Feir. Les propriétés d'instabilité non-linéaire de la vague de Stokes ont été comparées avec les résultats obtenus par la théorie linéaire.

Tous les calculs ont été exécutés sur l'ordinateur FACOM-M180II-AD à l'Institut de Recherche Navale.

Bibliographie

- BENJAMIN, T.B. et J.E. FEIR (1967): The disintegration of wave trains on deep water. *J. Fluid Mech.*, **27**, 417-430.
- CRAWFORD, D.R., B.M. LAKE, P.G. SAFFMAN et H.C. YUEN (1981a): Stability of weakly nonlinear deep-water waves in two and three dimension. *J. Fluid Mech.*, **105**, 177-191.
- CRAWFORD, D.R., B.M. LAKE, P.G. SAFFMAN et H.C. YUEN (1981b): Effects of nonlinearity and spectral bandwidth on the dispersion relation and component phase speeds of surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **112**, 1-32.
- FORD, J. et J. WATERS (1963): Computer studies of energy sharing and ergodicity for nonlinear oscillator systems. *J. Math. Phys.*, **4**, 1293-1306.
- LONGUET-HIGGINS, M.S. (1962): Resonant interactions between two trains of gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **12**, 321-332.
- LONGUET-HIGGINS, M.S. et O.M. PHILLIPS (1962): Phase velocity effects in tertiary wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **12**, 333-336.
- LONGUET-HIGGINS, M.S. et N.D. SMITH (1966): An experiment on third order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **25**, 417-435.
- MCGOLDRICK, L.F., O.M. PHILLIPS, N.E. HUANG et T.H. HODGSON (1966): Measurements of third-order resonant wave interactions. *J. Fluid Mech.*, **25**, 437-456.
- MCLEAN, J.W. (1982): Instabilities of finite-amplitude water waves. *J. Fluid Mech.*, **114**, 315-330.
- OKAMURA, M. (1984): Instabilities of weakly nonlinear standing gravity waves. *J. Phys. Soc. Japan*, **53**, 3788-3796.
- OKAMURA, M. (1985): On the instability of weakly nonlinear three-dimensional standing waves. *J. Phys. Soc. Japan*, **54**, 3313-3320.
- PHILLIPS, O.M. (1960): On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. *J. Fluid Mech.*, **9**, 193-217.
- PHILLIPS, O.M. (1967): Theoretical and experimental studies of gravity wave interactions. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **299**, 104-119.
- STIASSNIE, M. et L. SHEMER (1984): On modification of the Zakharov equation for surface gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **143**, 47-67.
- TOMITA, H. et H. SAWADA (1986): An experiment on resonant wave interactions in the ship test basin. *Proc. Ocean. Soc. Japan*, p. 209-210.
- ZAKHAROV, V.E. (1968): Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **9**, 190-194.

Abstract: For examining the transport of energy between components of nonlinear multi-dimensional waves in a seaway, numerical studies have been made by use of Zakharov equation. The mutual wave interaction in the case where two waves encounter at right angle to grow the third has been calculated. The amplitudes of three waves showed the complete recurrence and the maximum value of the third wave depended not only on the ratio of two wavenumbers of the principal waves but also on their amplitudes. Diagrams presenting such relations have been obtained. Relations rearranged are in fair agreement with values measured by an experiment in a basin. This result verified that the equation is useful to understand the sea states when the wave is not too steep. The instability properties of Stokes wave by use of the same equation on two horizontal dimensions were studied with emphasis on the estimation of the region of instability, and compared with existing ones with some remark.

有限振幅水面波の共鳴相互作用に関する数値的研究

富 田 宏

要旨: 海洋における有限振幅、多方向波の各成分間のエネルギー遷移を調べるために、Zakharov方程式を用いて数値的研究を行った。この方程式は波峻度について3次のオーダー迄の特異摂動によって求められたものである。それは任意方向に進む各成分波の振幅の長時間にわたる変動を記述することが出来る。ここでは、2つの波が直角に交わりそれによって第3の波が成長する場合について、それらの波の間の共鳴相互作用についての計算を行った。その結果、3つの波の振幅は完全な回帰現象を示し、第3の波の最大値は2つの主波の波数の比のみならずそれらの振幅にも依存している事が分かった。これらの量の間関係を示すダイヤグラムを作製し、それを利用して水槽実験によるデータとの対比を行い、波峻度が余り大きくない場合にはこの方程式は海面の状態を理解する上で十分有効なモデルであることを確認した。同じ方程式を用いて、ストークス波の2次元的不安定性について調べ、波数空間における不安定領域を計算した。結果を既往の線形安定性理論によるものと比較し、またそれらについての若干の考察を加えた。

Appendice A

Coefficients de l'équation de Zakharov:

$$T_{0123} = \frac{2V_3^{(-)}{}_{3-11}V_0^{(-)}{}_{20-2}}{\Omega_{1-3}-\Omega_3+\Omega_1} - \frac{2V_2^{(-)}{}_{02-0}V_1^{(-)}{}_{1-33}}{\Omega_{1-3}-\Omega_1+\Omega_3} \\ - \frac{2V^{(-)}{}_{22-11}V_0^{(-)}{}_{30-3}}{\Omega_{1-2}-\Omega_2+\Omega_1} - \frac{2V_3^{(-)}{}_{03-0}V_1^{(-)}{}_{1-22}}{\Omega_{1-2}-\Omega_1+\Omega_2} \\ - \frac{2V^{(-)}{}_{0+101}V^{(-)}{}_{2+323}}{\Omega_{2+3}-\Omega_3-\Omega_3} - \frac{2V^{(+)}{}_{-2-323}V_0^{(+)}{}_{1-0-1}}{\Omega_{2+3}+\Omega_2+\Omega_3} \\ + W_{0123},$$

$$\text{où } \Omega_{i\pm j} = \Omega(\mathbf{K}_i \pm \mathbf{K}_j),$$

$$V^{(\pm)}{}_{012} = \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \left\{ (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{K}_1 \pm K_0 K_1) \left[\frac{\Omega_0 \Omega_1}{\Omega_2} \frac{K_2}{K_0 K_1} \right]^{1/2} \right. \\ \left. + (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{K}_2 \pm K_0 K_2) \left[\frac{\Omega_0 \Omega_2}{\Omega_1} \frac{K_1}{K_0 K_2} \right]^{1/2} \right. \\ \left. + (\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 + K_1 K_2) \left[\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_0} \frac{K_0}{K_1 K_2} \right]^{1/2} \right\},$$

et

$$W_{0123} = \bar{W}_{-0-123} + \bar{W}_{23-0-1} - \bar{W}_{2-1-03} \\ - \bar{W}_{-02-13} + \bar{W}_{-032-1} - \bar{W}_{3-12-0},$$

où

$$\bar{W}_{0123} = \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{\Omega_0 \Omega_1}{\Omega_2 \Omega_3} K_0 K_1 K_2 K_3 \right]^{1/2} \\ \times \{ 2(K_0 + K_1) - K_{1+3} - K_{1+2} - K_{0+3} - K_{0+2} \},$$

et $K_{i+j} = |\mathbf{K}_i + \mathbf{K}_j|$.Dans le cas particulier où $\lambda_1 = 1,60$ m et $\lambda_2 = 5,21$ m, les coefficients s'écrivent:

$$T_{1111} = 1,5258, \quad T_{1221} = T_{1212} = 0,0038, \quad T_{1331} \\ = T_{1313} = 3,0745, \quad T_{1123} = T_{1132} = 0,0893, \\ T_{2112} = T_{2121} = 0,0038, \quad T_{2222} = 0,0443, \quad T_{2332} \\ = T_{2323} = -0,0362, \quad T_{2311} = 0,0883, \quad T_{3113} \\ = T_{3131} = 3,0745, \quad T_{3223} = T_{3232} = -0,0362, \\ T_{3333} = 12,6415, \quad T_{3211} = 0,0963.$$

Appendice B

Vérification d'équivalence entre la théorie de Zakharov et celle de Longuet-Higgins:

Si seulement deux vagues à nombre d'onde \mathbf{K}_1 et \mathbf{K}_2 existent, le transfert d'énergie entre elles n'est pas possible, mais une vague exerce une influence sur la vitesse de l'autre. Dans cette situation, deux théories doivent donner la même solution.

La dénivellation de la surface libre est donnée par:

$$\eta_i = A_i \cos(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{X} - \Omega_i' t) \quad (\text{B-1})$$

où, $\Omega_i' = \Omega_i \left(1 + \frac{1}{2} A_i^2 K_i^2 + \frac{K'}{2g\Omega_i A_i} \right)$, $\Omega_i^2 = gK_i$ et $\mathbf{X} = (x, y)$, Quand $A_1 = A_2 = A$, $\mathbf{K}_1 = K(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathbf{K}_2 = K(\cos\theta, -\sin\theta)$ et $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, la quantité Ω' est simplifiée comme suit:

$$\Omega' = \Omega \left(1 + \frac{1}{2} A^2 K^2 + \frac{K'}{2g\Omega A} \right). \quad (\text{B-2})$$

Les deuxième et troisième termes entre les parenthèses représentent l'effet d'interaction. Au moyen de la formule pour K' d'après l'équation (2.8) dans un article de LONGUET-HIGGINS et PHILLIPS (1962) après quelques corrections, ces termes sont représentés par:

$$A^2 K^2 F(\theta) \Omega, \quad F(\theta) = \frac{1}{2} (8 \cos^2 \theta - 3 - 2 \cos^4 \theta) \\ + \sin^2 \theta \frac{\cos \theta + 2 - 4 \cos^2 \theta}{2 - \cos \theta}. \quad (\text{B-3})$$

D'autre part, l'équation de Zakharov donne:

$$(T_{1111} + \tilde{T}_{1221}) |B|^2. \quad (\text{B-4})$$

qui doit être équivalent au deuxième et troisième termes dans les parenthèses de (B-2). En utilisant la formule (3) de cet article et les relations dans l'appendice A, elle se transforme en:

$$A^2 K^2 F(\theta) \Omega$$

qui concorde avec (B-3).