La mer 33: 221–225, 1995
Société franco-japonaise d'océanographie, Tokyo

海の表面波と基本流の相互作用についてⅠ*

松島　晟**・冨塚　明**・後藤　信行**・古賀　雅夫**

On the interaction between a surface wave and a basic current in the sea I*

Akira MATSUSHIMA**, Akira TOMIZUKA**, Nobuyuki GOTO** and Masao KOGA**

Abstract: In the framework of waves with small amplitudes present authors study on a non-linear interaction between a neutral surface wave (or a short wave) progressing horizontally and a basic lateral shear flow in a non-viscous fluid.

The following results are obtained.

(i) For a wave progressing with a non-zero angular wave vector in a basic non-shear flow, or with a zero angular vector in a basic shear flow, any wave does not interact with the basic flow.

(ii) For a wave progressing with a non-zero angular wave vector in a basic shear flow, there exist waves of two groups. Two kinds of waves in one group, either progressing in a positive direction or in a negative direction, interact with the basic flow and then increase in the amplitudes in a plane fairly away from the critical level.

1. 序　論

基本流と波動の非線形相互作用はいろいろと調べられている。とくに大気中における内部重力波が鉛直方向に伝わっているときの，水平方向の基本流との相互作用はHINES and REDDY (1967), BOOKER and BRETHERTON (1967) をはじめ，JONES(1967)などが調べている。ここでの重要な結論の1つは，波の水平方向の位相速度が，基本流の速度と一致するcritical levelでは，波のエネルギーが基本流に吸収または放出される，ということである。これらについての総合報告は，田中 (1975) が「内部重力波の理論」で行っている。他のいろいろな文献はそこに書かれている。また海のなかの表面波と基本流の相互作用については，LONGUET-HIGGINS and STEWART(1961)がいろいろと取り扱って議論している。また鳥羽 (1978) が「海面付近の力学」でふれている。その中では主に，鉛直，水平方向の二次元で波による質量輸送現象やRadiation1 stressについて述べてある。これらのいろいろな文献も鳥羽の論文の中に掲げられてある。

著者らは三次元空間において水平方向に伝播する表面波と水平方向にshearをもつ基本流の相互作用について微小振動の範囲内で調べてみた。粘性のない場合の，著者らの結論の１つは，外部重力波（表面波）では，基本流の速さと，基本流が流れている方向の波の位相が一致するcritical levelでは，波のエネルギーは吸収，または放出されずに，むしろ位相速度と基本流の速さが，かなり離れているところで吸収・放出が行われているということである。

記号

x ：水平方向の座標軸
(x-coordinate normal to the basic flow on the sea surface)

y ：水平方向の座標軸で，基本流の方向にとる
(y-coordinate parallel to the basic flow on the sea surface)

z ：座標軸で鉛直上向きにとる
(z-coordinate directed upward)

m ：波の鉛直方向の振幅の減衰係数

* 1995年10月13日受理　Received October 13, 1995

** 長崎大学教養部物理学教室　〒852 長崎市文教町1－14
Department of Physics, Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University, 1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki City, Nagasaki, 852 Japan

(damping factor showing the structure in the z-direction of a surface wave)

k_y : y方向の波の角波数

(angular wave number in the y-direction)

ω : 波の角周波数

(angular wave frequency)

V : 基本流の y 成分で $V=\alpha x+V_0$

(basic flow. V_0; constant component)

α : 基本流の shear

(a shear of basic flow)

M : $M=\sqrt{m^2-k_y^2}$

Ω : $\Omega=\omega-k_yV_0$

ν : 動粘性係数

(the coefficient of kinematic viscosity)

u : 波の速度の x 成分

(x-component of the velocity following a wave)

v : 波の速度の y 成分

(y-component of the velocity following a wave)

w : 波の速度の z 成分

(z-component of the velocity following a wave)

p : 波による圧力

(pressure following a wave)

ρ : 液体の密度

(density of the fluid)

c_y : 波の y 方向の位相速度

(phase velocity in the y-direction of a wave)

2. 波と基本流との相互作用について

基本流$\vec{V}$, 圧力 $P(z)$ のなかを表面波による disturbance が, 速度 $\vec{v}=(u, v, w)$, 圧力 p で進行しているものとする。ここで, 流体の密度を一定とし, それを ρ で表し, また座標軸は基本流$\vec{V}$が流れる方向に y 軸を, y 軸に直交して, 水平方向に x 軸をとり, 鉛直上向きに z 軸をとる。また (x, y) 座標軸は海面上にとる。total current, total pressure はそれぞれ

$$\vec{v'}=\vec{V}+\vec{v} \tag{1}$$

$$p'=P(z)+p \tag{2}$$

である。もちろん, ここで $\vec{v}$, p は波によるperturbation である。

運動方程式系は

$$\frac{D\vec{v'}}{Dt}=-\mathrm{grad}\,\frac{p'}{\rho}-g\vec{k}+\nu\nabla^2\vec{v'} \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v'}=0 \tag{4}$$

である。

ここで$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルとする。

つぎに, y 方向に流れている基本流の成分を

$$V(x)=V_0+\alpha x \tag{5}$$

とする。ただし, $\dfrac{D}{Dt}\equiv\dfrac{\partial}{\partial t}+v'\cdot\nabla$ は実質微分であり, ν は動粘性係数で粘性係数 μ との間に $\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$ の関係がある。また α は基本流の shear である。

(3), (4) を線形化すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}+\alpha u\vec{j}=-\nabla\frac{p}{\rho}+\nu\nabla^2\vec{v} \tag{3$'$}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v}=0 \tag{4$'$}$$

ここで (3)′ の divergence をとり, (4)′ を用いて

$$2\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=-\nabla^2\frac{p}{\rho} \tag{6}$$

となる。(3)′ と (6) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla^2\frac{p}{\rho}=2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\frac{p}{\rho}+\nu\nabla^4\frac{p}{\rho} \tag{7}$$

となる。ここで海の深さが波長 λ に比べ, 非常に深い場合を考え, 近似解として次の形の波が進行しているものとする。

$$\frac{p}{\rho}=A(x)e^{mz}e^{i(\omega t-k_y y)} \tag{8}$$

ここで, $m>0$ とする。すなわち $z\to-\infty$ で, $\dfrac{p}{\rho}\to 0$ の解を選んでいる。(7) より,

$$i(\omega-k_yV)\left\{\frac{d^2A}{dx^2}+(m^2-k_y^2)A\right\}=$$

$$-2\alpha ik_y\frac{dA}{dx}+\nu\left\{\frac{d^4A}{dx^4}+2(m^2-k_y^2)\frac{d^2A}{dx^2}+(m^2-k_y^2)^2A\right\} \tag{9}$$

となる。

以下では粘性のない場合のみを考える。

この場合, $\dfrac{p}{\rho}$ は (8), (9) で与えられ, 速度は次式で与えられる。

$$u=\frac{i}{\omega-k_yV}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$v=\frac{i}{\omega-k_yV}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}\right)-\frac{\alpha}{\omega-k_yV}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) \tag{10}$$

$$w=\frac{i}{\omega-k_yV}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

（ｉ）基本流がない場合

このとき，$V_0=0$，$\alpha=0$ なので

$$i\omega\left\{\frac{d^2A}{dx^2}+(m^2-k_y^2A\right\}=0 \tag{11}$$

である。ここで

$$A(x)=A_0e^{ik_xx} \tag{12}$$

と仮定すれば

$$m^2=k_x^2+k_y^2 \tag{13}$$

すなわち，波の垂直構造を示す数mと波数k_x，k_yとの関係を示している。波は，（８），(12)，(13）で表される性質を示す。この場合は基本流が存在しないから，座標軸x，yは適当に選べる。そこで波の進行方向にx軸をとれば$m^2=k_x^2$となる。

さらに海面での波面を$z=\zeta$（x，y，t）で表せば kinematic boundary condition は

$$\left.\frac{D(P+p)}{Dt}\right|_{z=\zeta}=0 \tag{14}$$

となる。これを線形化すると，$z=0$で近似して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{p}{\rho}-wg=0\,;\,z=0 \tag{15}$$

となる。

仮に，$V=0$とすれば

$$\omega^2=mg=\sqrt{k_x^2+k_y^2}\,g=kg \tag{16}$$

である。

波の phase velocity c は

$$c=\frac{\lambda}{T}=\frac{\frac{2\pi}{k}}{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{17}$$

この式は frequncy eq. である。ここでT，λは波の周期と波長である。

（ii）基本流に shear はあるが，波の角波数ベクトルが０の場合，すなわち$\alpha\neq0$，$k_y=0$の場合

（９）より

$$\frac{d^2A}{dx^2}+m^2A=0 \tag{18}$$

となり，（ｉ）と全く本質的には同じになる。

（iii）shearはないが，角波数ベクトルが０でない場合，すなわち，この場合は$\alpha=0$，$k_y\neq0$となる。

（９）より波の垂直構造と波数の関係は（ｉ）の場合と全く同じである。基本流V_0が波の進行性に関係がないのは面白い。Aは三角関数型であり，wave type を示している。したがって波は振幅は一定のまま進行する。

（iv）shearがあり，かつ角波数ベクトルが０でない場合

（９）より

$$\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{2\alpha k_y}{\omega-k_yV}\frac{dA}{dx}+(m^2-k_y^2)A=0 \tag{19}$$

（３）を用いて

$$X=\sqrt{m^2-k_y^2}\left\{x-\frac{\omega/k_y+V_0}{\alpha}\right\} \tag{20}$$

と変数変換する。ここで$m^2-k_y^2<0$の場合は，すべてのxの領域でx方向に波は遮断領域となる。したがって，$m^2-k_y^2>0$の場合を考える。

$$\frac{d^2A}{dX^2}-\frac{2}{X}\frac{dA}{dX}+A=0 \tag{21}$$

ここで

$$A=XB \tag{22}$$

とおけば（21）より

$$\frac{d^2B}{dX^2}+\left(1-\frac{2}{X^2}\right)B=0 \tag{23}$$

となる。ここで$|X|$が小さい領域では

$$\frac{d^2B}{dX^2}-\frac{2}{X^2}B=0 \tag{24}$$

と近似される。

上式の解は波の解ではなく，

$$B\propto\frac{1}{X},\ B\propto X^2 \tag{25}$$

または

$$A\propto \mathrm{const},\ A\propto X^3$$

となる。これは一見すると，進行波の型ではない。また$|X|>>1$の領域では（23）は

$$\frac{d^2B}{dX^2}+B=0$$

となり，Bの解は

$B\propto\begin{cases}\sin X\\ \cos X\end{cases}$ という三角関数型となり，またAは

$A\propto\begin{cases}X\sin X\\ X\cos X\end{cases}$ という振幅の変化する波型を表す.

また，ここで実際に$A=X^{3/2}C$とおけば

$$\frac{d^2C}{dX^2}+\frac{1}{X}\frac{dC}{dX}+\left(1-\frac{\frac{4}{9}}{X^2}\right)=0 \tag{26}$$

となる。したがって

$$C=J_{\pm 3/2}(X)$$

となる。ここで$J_{\pm 3/2}(X)$ は Bessel func. で

$$J_{+3/2}(X)=\sqrt{\frac{2}{\pi X}}\left(\frac{\sin X}{X}-\cos X\right)$$
$$J_{-3/2}(X)-\sqrt{\frac{2}{\pi X}}\left(\frac{\cos X}{X}+\sin X\right) \tag{27}$$

である。

そこでA_1，A_2を積分定数として，一般解は

$$C(X)=A_1J_{+3/2}(X)+A_2J_{-3/2}(X)$$

である。または次のようになる。

$$A(X)=X^{3/2}\left\{A_1J_{+3/2}(X)+A_2J_{-3/2}(X)\right\}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{A_1\sin X-A_2\cos X-X(A_1\cos X+A_2\sin X)\right\}$$

またν次のHankel func. 表示では第１種，第２種 Hankel func. 関数を$H_\nu^{(1)}$，$H_\nu^{(2)}$ で表せば

$$H_\nu^{(1)}(X)=J_\nu(X)+iY_\nu(X)$$
$$H_\nu^{(2)}(X)=J_\nu(X)-iY_\nu(X)$$

となる。ここでY_ν はν次の Bessel func. の Neumann 表示である。したがって，解は

$$H_{3/2}^{(1)}(X)=J_{3/2}(X)+iJ_{-3/2}(X)$$
$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi X}}\left(i\frac{e^{iX}}{X}+e^{iX}\right)$$

$$H_{3/2}^{(2)}(X)=J_{3/2}(X)-iJ_{-3/2}(X)$$
$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi X}}\left(-i\frac{e^{-iX}}{X}+e^{-iX}\right)$$

である。

$H^{(1)}$ 関数はX方向に関して負方向の進行波を，$H^{(2)}$ 関数は正方向の進行波を表す。一般解はB_1，B_2 を積分定数として

$$A(X)=X^{3/2}\left\{B_1H_{3/2}^{(1)}(X)+B_2H_{3/2}^{(2)}(X)\right\}$$
$$=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{(B_1e^{i(X+\pi/2)}+B_2e^{-i(X+\pi/2)})+X(B_1e^{iX}+B_2e^{-iX})\right\} \tag{28}$$

である。ここで変数Xからxに戻すと，Hankel表示で，

$$A(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}R(B_1e^{i\delta}+B_2e^{-i\delta}) \tag{29}$$

とおける。ここで

$$R=\sqrt{1+M^2(x-\Omega/\alpha k_y)^2} \tag{30}$$
$$\delta=Mx-M\Omega/\alpha k_y+\theta \quad \text{ただし，}$$
$\tan\theta=1/\{M(x-\Omega/\alpha k_y)\}$ であり，さらに

$$M=\sqrt{m^2-k_y^2},\ \Omega=\omega-k_yV_0$$

で定義される。

$J_{3/2}(X)$ と$J_{-3/2}(X)$，または$H_{3/2}^{(1)}(X)$ と $H_{3/2}^{(2)}(X)$は互いに独立な関数であるから，$A_1=0$，$A_2=0$，または$B_1=0$，$B_2=0$ 以外には$A(X)=0$ の解はない。

そこで$A(X)$ のXの正方向に進行する波も，また負方向に進行する波もそれぞれ２つの波から成り立っていると解釈できる。１つは振幅が一定な波と，もう１つは振幅がXによって変化する波から成り立っている。すなわち $|X|<<1$ の領域では，あるいは critical level ($\omega/k_y-V=0$，または$c_y=V$) の近傍では，J_ν 表示では

$$A(X)\fallingdotseq A_1\sin X-A_2\cos X$$

また，Hankel 表示では

$$A(X)\fallingdotseq B_1e^{i(X+\pi/2)}+B_2e^{-i(X+\pi/2)} \tag{31}$$

となる。したがって，この領域では波の振幅は一定となり，エネルギー的にみれば，この領域では波と基本流の相互作用はほとんどない。すなわち，波と基本流はお互いにエネルギーの吸収，放出はない。

また $|X|>>1$ の領域，または $|V-c_y|>>|\alpha|/\sqrt{m^2-k_y^2}$ が成り立つ領域では，

$$A(X)\fallingdotseq -X(A_1\cos X+A_2\sin X)$$

または

$$A(X)\fallingdotseq -X(B_1e^{iX}+B_2e^{-iX}) \tag{32}$$

となる。この領域はXの正方向に前進する波も，負方向に進む波も，波の振幅は増大する。したがって，この領域では波は基本流からエネルギーを吸収していると考えられる。また (29)，(30) からもRが増大することがわかる。

3. 結　論

この論文では，粘性がない場合について，水平shear

のある基本流と海の表面付近に水平に基本流方向に伝わる外部重力波（表面波）との非線形相互作用について，微小振幅の理論の範囲内で調べた。その結果は以下の通りである。

（i） 基本流にshearがあるが，波の角波数ベクトルが0の場合，波の振幅は一定となり，波と基本流の非線形相互作用はない。

（ii） 基本流はあるが，shearがなく，かつ角波数ベクトルが0でない場合にも非線形相互作用はない。

（iii） shearがあり，かつ，角波数ベクトルが0でない場合には，波は振幅が一定の波と振幅が場所によって増加する2種類の波から成り立っている。さらに基本流が流れる方向の波の位相速度が基本流の速度と一致するcritical levelの付近では，後者の波も振幅が一定となり，波と基本流との相互作用はない。しかしcritical levelからかなり離れた所では，振幅が変化する波の成分の寄与も大きくなり，波と基本流の相互作用は大いにあると考えられる。

文　献

Booker, J. R. and F. P. Bretherton (1967): The critical layer for internal gravity waves in a shear flow J. Fluid Mech., **27**, p. 513.

Hines, C. O. and A. Reddy (1967): On the propagation of atmospheric gravity waves through region of wind shear. J. Geophys. Res., **72**, p. 1015.

Jones, W. L. (1967): Propagation of internal gravity waves in fluids with shear flow and rotation. J. Fluid Mech., 30, p. 439.

Longuet-Higgins M. S. and R. W. Stewart (1961): The change in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform current. J. Fluid Mech. **10**, p. 529.

田中　浩 (1975)：大気中の内部重力波，内部重力波の理論，126号，気象研究ノート，日本気象学会.

鳥羽良明 (1978)：海洋力学，第2章　海面付近の力学，135号，気象研究ノート，日本気象学会.