

Laplace の Tidal equation の 解  
—continued fraction 法による固有値の計算で  
収束しない原因とその改良法—\*

松島 晟\*\*・古賀 雅夫\*\*・後藤 信行\*\*

On the Laplace's Tidal Equation  
—The reasons of nonconvergence of solutions in the continued fraction  
method and calculations in an improved method—\*

Akira MATSUSHIMA\*\*, Masao KOGA\*\* and Nobuyuki GOTO\*\*

**Abstract:** In the previous paper, it was shown that the eigenvalue calculations of Laplace's tidal equation did not give good results in the cases of the southward oscillating modes with long periods. Here we studied on the first two approximated eigenvalues in five methods ; (I), (II), (III), (IV), and (V). It is found that (1) the choice of the first two approximated eigenvalues is important when eigenvalues are calculated on the basis of the linear approximation, (2) the method (II) gives the best results among five, and (3) the conclusion in the previous paper was ascertained. Furthermore, another form of the calculation on the basis of the continued fraction is proposed, and then it is found that this method gives good results.

1. 緒言

前論文(古賀ら, 1991)で Laplace の Tidal equation の continued fraction による解法 (HOUGH, 1897, 1898)について, 特にその一様収束性について調べた。調べた case は東西方向の波数はないが南北方向の振動モード  $n$  については赤道に対して反対称モードと, 対称モードについて, また角振動数についても二, 三の場合について調べた。その結果, 前の論文の範囲内の方法では, 改善はされても, やはり収束しなかったり, または非常に収束が遅くて適当な精度の数値が得られなかったりする場合があった。特にモード  $n$  が  $n=5, 6$  とか, 長周期 (一年周期) のときに現れた。しかし, 何分 continued fraction の項数がかなり多くなるので,

解析的にその原因を調べるのは困難のように思われる。ここでは, 色々な計算方法で行うなかでそれらの原因とさらなる改善方法を見出したい。

2. 計算の概略

前の論文の結果から,  $L_n=0$  から求めた近似根はかなり良いように思われる。そこで, まず  $L_n=0$  を解いて近似根  $R$  を求め, この  $R$  を用いて逆にいろいろな  $L_i$  の数値を計算する。つぎに,  $L_i$  を用いて  $K_{n+2}$  の計算に必要な continued fraction の項数を計算しておく。項数は  $K_j$  として  $j=n+20$  項まで必要なことがわかった。すなわち,  $K_{n+2}$  の計算では必要な計算の時には  $j=n+4$  から  $j=n+20$  まで全ての項を用いて計算する。言い換えれば, これ以上の項数, 例えば  $j=n+22$  まで用いて  $K_{n+2}$  を計算しても, 殆ど精度は上がらない。 $H_{n,2}$  の項の計算では最初の項 ( $H_1$  または  $H_2$ ) から  $H_{n,4}$  までの全ての項を用いて計算することにした。このようにして計算した  $K_{n+2}$ ,  $H_{n,2}$  は精度を確認するための残差に主に用いられる。つぎに, 調べる角振動数と南北方向の振動のモードであるが, 前の論文と同じ場合

\* 1991年10月18日受理 Received October 18, 1991

\*\* 長崎大学教養部物理学教室, 〒852 長崎市文教町 1-14  
Department of Physics, Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University 1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki, 852 Japan

について計算した。すなわち、角振動数が  $1.4154 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  (半日太陽日の周期) では、反対称モードでは  $n=1, 3, 5$ , 対称モードでは  $n=2, 4, 6$  について調べる。さらに角振動数  $2.1817 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  ( $1/3$ 日太陽日の周期) では反対称モードでは  $n=1, 3, 5, 7$ , 対称モードでは  $n=2, 4, 6$ , について調べる。角振動数  $1.4052 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  (半日太陰日の周期) では反対称モードでは  $n=1, 3, 5$ , 対称モードでは  $n=2, 4, 6$  について、また、角振動数  $1.99102 \times 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$  (一年周期) の場合については  $n=1, 3, 5$  と  $n=2, 4, 6$  について調べる。用いた計算方法は次の (I), (II), (III), (IV), (V) の場合で、具体的にはそれぞれの箇所述べることにする。共通して言えることは、第1近似  $R_1$  は  $L_n=0$  より求める。そこで、この  $R_1$  より色々な  $L_n$  を計算して、つぎに  $K_{n+2}$  を continued fraction の項数  $j=n+20$  まで用いて計算する。また、 $H_{-2}$  は前にも述べたとおり、初めの項 ( $H_1$  または  $H_2$ ) から全ての項数を用いて計算する。このようにして計算した  $K_{n+2}$ ,  $H_{n+2}$  を用いて、 $R_1$  に対する残差  $E_1$  を次の式から計算する。

$$E_1 = L_n - K_{n+2} - H_{n+2} \quad (1)$$

### 3. 具体的計算

(I) この方法は 2. で述べた方法で、残差  $E_1$  まで求める。つぎに、第2近似  $R_2$  は

$$L_n = -E_1 \quad (2)$$

から求める。ここで  $L_n$  としては、定義式

$$L_n = \frac{f^2 - 1}{n(n+1)} + \frac{2}{(2n+3)(2n-1)} - R \quad (3)$$

を用いる。第3近似以後は前の論文にも述べたように、次の式から直線近似で求める。

$$R_{i+2} = \frac{E_i R_{i+1} - E_{i+1} R_i}{E_i - E_{i+1}} \quad (4)$$

(4)式から次々と近似値  $R_{i+2}$  を求めて、精度が有効数字4ケタになるまで繰り返した。

個々の計算では  $1.4154 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  (半日太陽日の周期) の場合で、赤道に対して反対称な振動モードでは、 $n=1, 3, 5$  について計算したが、収束も速く、それぞれ良い固有値の結果  $R_{n=1} = 0.4026\text{E}+00$ ,  $R_{n=3} = 0.4460\text{E}-01$ ,  $R_{n=5} = 0.1603\text{E}-01$  が得られた。また、赤道に対して対称なモードでは、 $n=2, 4, 6$  の場合を計算し、やはり、収束は速く、良結果が得られた。

$2.1817 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  ( $1/3$ 日太陽日の周期) の振動の場合、反対称な振動モードで  $n=1, 3, 5, 7$  について計算した。また対称モードについては、 $n=2, 4, 6$  について計

算を行った。この場合、全てについて、収束も速く、また良い結果が得られた。

角振動数  $1.4052 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  (半日太陰日の周期) では反対称振動ではモード  $n=1, 3, 5$ , 対称振動では  $n=2, 4, 6$  について計算を行った。結果は、 $n=1, 3, 5$ ,  $n=2, 4$  では収束も速く、良い結果が得られたが、 $n=6$  では収束はしたものの、結果は思わしくなく、 $n=4$  と同じ結果が得られた。

角振動数  $1.99102 \times 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$  (一年周期) の場合、反対称振動では  $n=1$  では良い結果が得られたが、 $n=3, 5$  の場合にはそれぞれ他の値 ( $n=15$  と  $n=3$  に相当する) が得られた。また、対称振動では  $n=2, 4$  では良い結果が得られたが、 $n=6$  で他の値 ( $n=10$  に相当する) が得られた。以上を表にすると表 I のようになる。

(II) ここでも 2. で述べた方法と同じ近似計算を行った。すなわち、 $L_n=0$  から第1近似をもとめる。 $R_1$  を用いて  $K_{n+2}$  の continued fraction の項数を決める。項数は  $K_j$  として  $j=n+20$  までとなる。また、やはり、 $H_{n+2}$  は第一項 ( $H_1$  又は  $H_2$ ) から  $H_{n+4}$  まで全て用い

TABLE I. The table shows the results of computations in the method (I).

Here, ○ shows that we could get good results. △: slows that the convergence was slow to get satisfactory results. × shows that we could not get good results.: impossible

angular freq.	mode $n$			
0.14544 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.21817 E-03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
0.14052 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.199102E-06	1	3	5	
	○	○	○	×( $n=4$ )
	2	4	6	
	1	3	5	
	○	×( $n=15$ )	×( $n=3$ )	
	2	4	6	
	○	○	×( $n=10$ )	

て計算する。これら $K_{n+2}$ と $H_{n-2}$ より $R_1$  に対する残差  $E_1 (=L_n - K_{n+2} - H_{n-2})$ を計算する。つぎに、第2近似を計算する。第2近似では $K_{n+2}$ と $H_{n-2}$ として

$$K_{n+2} \approx \frac{A_{n+2}}{L_{n+2}} \tag{5}$$

$$H_{n-2} \approx \frac{A_n}{L_{n-2}} \tag{6}$$

の近似値を用いる。また、固有値の第2近似  $R_2$ は次の式から求める。

$$L_n - K_{n+2} - H_{n-2} = 0. \tag{7}$$

さらに、この $R_2$ に対する残差  $E_2$ を計算する。第3近似以後は(4)式を用いて  $R_i$ を計算し、この $R_i$ に対する残差 $E_i$ を計算して、以後、同様の計算を繰り返し、精度を上げる。計算した場合は(Ⅰ)の場合と同じである。結果は次の表Ⅱにまとめられた。

(Ⅲ) 第1近似 $R_1$ を求め、それ以下の計算は第2近似を求めるまでは、(Ⅰ)、(Ⅱ)、と全く同じである。つぎに、第2近似の計算をする。 $K_{n+2}$ と $H_{n-2}$ として

$$K_{n+2} \approx \frac{A_{n+2}}{L_{n+2}} \tag{8}$$

$$H_{n-2} \approx \frac{A_n}{L_{n-2}} \tag{9}$$

TABLE II. The table shows the results of computations in the method (Ⅱ).

○: good, △: slow, ×: impossible

angular freq.	mode $n$			
0.14544 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.21817 E-03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
0.14052 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.199102E-06	1	3	5	
	○	×( $n=11$ )	○	
	2	4	6	
	○	○	○	

の近似を用いて、固有値の第2近似 $R_2$ を $L_n - K_{n+2} - H_{n-2} = 0$ から求め、それに対する残差 $E_2$ も求める。つぎに、第3近似 $R_3$ を計算する。第3近似では $K_{n+2}$ と $H_{n-2}$ として次の近似値

$$K_{n+2} \approx \frac{A_{n+2}}{L_{n+2} - \frac{A_{n+4}}{L_{n+4}}} \tag{10}$$

$$K_{n+2} \approx \frac{A_n}{L_{n+2} - \frac{A_{n+2}}{L_{n+4}}} \tag{11}$$

を用いる。このとき計算に必要な $L_i$ は近似値 $R_2$ を用いて計算する。もちろん、ここでの $A_n, A_{n-2}$ の添字( $n, n-2$ )が0か負の時は $A_i = 0 (i=n, n-2)$ とする。固有値の第3近似 $R_3$ はやはり $L_n - K_{n+2} - H_{n-2} = 0$ より求め、またこの $R_3$ に対する残差 $E_3$ も求める。これら $R_2, E_2, R_3, E_3$ ,を用いて、それ以後の固有値の近似 $R_i$ を(3)式から、またこの $R_i$ に対する残差 $E_i$ を計算して、逐次近似を続行する。

この結果は表Ⅲに示す。

(Ⅳ) さらに第3近似 $R_3$ ・それに対する残差 $E_3$ までは(Ⅲ)と全く同じであるが、第4近似 $R_4$ を求めるには、この $R_3$ を用いて $L_i$ を計算し、この $L_i$ と $K_{n+2}, H_{n-2}$ として

TABLE III. The table shows the results of computations in the method (Ⅲ).

○: good, △: slow, ×: impossible

angular freq.	mode $n$			
0.14544 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.21817 E-03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
0.14052 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.199102E-06	1	3	5	
	○	×( $n=7$ )	×( $n=7$ )	
	2	4	6	
	○	○	○	

TABLE IV. The table shows the results of computations in the method (IV).  
○: good, △: slow, ×: impossible

angular freq.	mode $n$		
0.14544 E-03	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6
0.21817 E-03	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6
0.14052 E-03	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6
0.199102E-06	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6

TABLE V. The table shows the results of computations in the method (V).  
○: good, △: slow, ×: impossible

angular freq.	mode $n$		
0.14544 E-03	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6
0.21817 E-03	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6
0.14052 E-03	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6
0.199102E-06	1	3	5
	○	○	○
	2	4	6

$$K_{n+2} = A_{n+2} / \{L_{n+2} - A_{n+4} / (L_{n+4} - A_{n+6} / L_{n+6})\}, \quad (12)$$

$$H_{n-2} = A_n / \{L_{n-2} - A_{n-4} / (L_{n-4} - A_{n-6} / L_{n-6})\}, \quad (13)$$

を用いて、 $L_n - K_{n+2} - H_{n-2} = 0$ から $R_4$ を求め、さらに $R_4$ に対する残差 $E_4$ を計算した。ここで、 $A_n, A_{n-2}, A_{n-4}$ の添字で、これらが零または負になるとき $A_i = 0$  ( $i = n, n-2, n-4$ )とする。さらに固有値の第5近似以後は $R_3, E_3, R_4, E_4$ を用いて(4)式から求めた。その後逐次近似は(Ⅲ)等と同様にして行う。この結果を表IVに示す。

(V) 前の論文の(c)の場合を今一度説明する。すなわち、(IV)を拡張して固有値の近似値を求める。(IV)と同じようにして第5近似以後も $K_{n+2}$ の計算では近似計算の回数を増すごとに、continued fractionの項を1つずつ増やして行く。さらに、項数が増え、固有値に影響を与えない( $K_j$ として) $j = n+20$ まで来ると、それ以後は項数を $j = n+20$ で止める。 $H_{n-2}$ についても、近似回数を増やすごとに、やはりcontinued fractionの項数を1項ずつ増やし、初めの項( $H_1$ または $H_2$ )になるまで増加させ続ける。これ以後の近似計算は(4)式を用いて(IV)と同じように行った。その結果は表Vに示す。

#### 4. 計算結果の比較

以上表I, II, IIIを比較すると内挿式(4)を用いて計算する際の初期値の取り方によって収束が異なって来ることがわかる。すなわち、直線近似(4)の出発点として第1近似, 第2近似の選び方が非常に重要なことがわかる。その中で(II)の初期値の取り方が最も優れている。すなわち、結果が良いと思われる方法(Ⅲ)が、方法(Ⅱ)よりも良くないのは驚くべきことである。また、全ての表を比較し、さらに、結果を見ると $L_n - K_{n+2} - H_{n-2} = 0$ の近似根も非常に良い精度の近似であることもわかる。

さらに、長周期の時は一般に短周期の時より思わしい結果が得られにくく、また南北方向のモード $n$ が大きくなるにつれても、良い結果が得られなくなってくる。その原因は $n$ が大きくなると、固有値の絶対値が小さくなり、また固有値とその次の固有値の間隔が狭くなることから生じるのであろう。

長周期で良い結果が得られにくくなる原因の1つを調べるために特に(Ⅱ)の場合の角振動数 $1.99102 \times 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$ (一年周期)、南北方向のモード $n = 5$ の場合を調

べよう。固有値の第1近似 $R_1 = -0.1624 \times 10^{-1}$ 、その残差 $R_1 = -0.17614 \times 10^1$ 、 $H_{n-2} = 1.7556 \times 10^1$ 、 $K_{n+2} = 0.57341 \times 10^{-2}$ 、となっている。ここで残差 $E_1$ 、 $H_{n-2}$ が、 $R_1$ 、 $K_{n+2}$ に比べて1ケタ大きいのに注意してその原因を調べた。その結果 $H_3 = A_3 / (L_3 - A_1 / L_1)$ で分母の有効数字がお互いに打ち消し合ってほとんど近似値の性格を失い、かつ絶対値も小さくなる。したがって、分母にあるので $H_3$ は意味を失っていることがわかった。そこで、この場合は原則的にこの方法での計算は成功しない筈だが(II)で良い結果が得られたのは面白い。一般的には求まらない原因は他にもあると思われる。つぎに、

求まらない原因をさらに調べるために残差について調べた。

### 5. 残差の変化

ここでは固有値のまわりの残差の変化を計算してみた。計算方法は固有値の近くの値を $L_n = 0$ から求め、その値の近傍の $x$ に対して、 $L_n$ 、 $K_{n+2}$ 、 $H_{n-2}$ を計算して(1)式から残差を求める。そこで大きく2つの場合について述べてみる。1つは良く収束する場合と、今1つはうまく収束しない場合である。

次の図1、2はそれを示す。

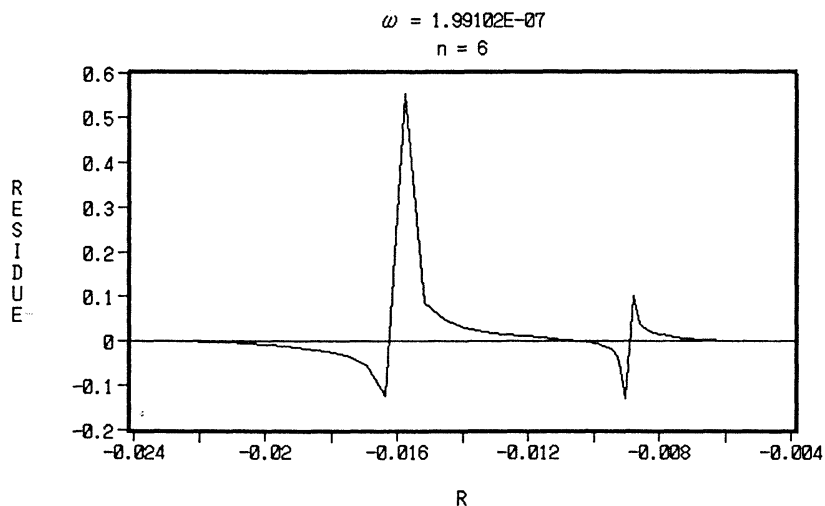


Fig. 1. The variation of residue ( $=L_n - K_{n+2} - H_{n-2}$ ) is shown in the neighborhood of an eigenvalue ( $0.14722E+00$ ).

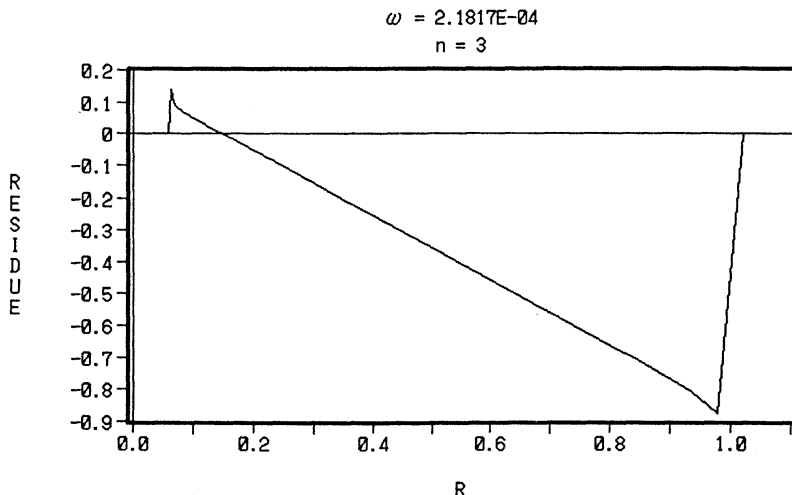


Fig. 2. The variation of residue ( $=L_n - K_{n+2} - H_{n-2}$ ) is shown in the neighborhood of an eigenvalue ( $-0.10355E-01$ ).

図1は角振動数  $2.1817 \times 10^{-4} \text{sec}^{-1}$  で南北モード  $n=3$  の場合である。全体では今求めようとする根より大きな前の根と小さい次の根の間の2ヶ所で発散する。したがって、この発散する値を越えると求めようとする根の近似性が失われることがわかる。この場合は  $x=0.09$  と  $0.98$  の近傍で残差の図は発散を示している。

図1では、ほとんどの  $x$  の領域で残差が直線上にあり、したがって残差を直線で近似して求める方法が大いに有用であることがわかる。

角振動数  $1.99102 \times 10^{-7} \text{sec}^{-1}$  でモード  $n=6$  の残差の変化を図2に示す。この場合、 $x=-0.015$  と  $x=-0.009$  の近傍でやはり発散している。有効な  $x$  の幅は  $0.006$  と狭く、また残差の変化が直線的である範囲も狭いことがわかる。したがって、一般的には残差を直線で外挿しても、すぐに幅  $0.006$  を越えてしまうであろうし、また、残差の零点(固有値)から発散する点までの間隔も、 $x$  の絶対値も非常に小さい。したがって、残差を直線で外挿するうちに、次の固有値の領域に入ってしまう、直線近似では求まりにくいのであろう。

## 6. 改善された方法

(i) 上の残差の図を用いて直接固有値を求めるとか、あるいは精度の良い第1, 第2近似値を求めることは可能であろう。すなわち、 $L_n=0$  より固有値の近似値を求め適当なきざみを取ってこの近似値の近傍での残差の変化を求める。この図より、残差の零点、または、その近傍から第1, 第2近似をさがす。その後は、今まで述べた方法で近似の精度を上げる。

(ii) その他の計算方式の試み

$L_n=0$  から第1近似を求め、さらに  $K_{n+2}$  の計算に必要な continued fraction の項数の求め方、及び  $R_1$  に対する残差  $E_1$  の計算方法は2. の概略で述べた通りである。次に、第2近似  $R_2$  にうつる。ここでは、結果も良く、計算に便利な(II)の方式から求める。すなわち、

$$R_2 = B_n + E_1 \quad (14)$$

から求める。ここで、 $B_n$  は

$$B_n = \frac{f^2 - 1}{n(n+1)} + \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} \quad (15)$$

さらに  $R_2$  に対する残差  $E_2$  も求めておく。第3近似計算以後は近似値の振動を抑えつつ、精度を上げるために、前に求めた近似値  $R_{i-1}$  を用いて、次に述べる方法で逐次近似を行う。まず、 $L_n = B_n - R_i$  とおく。ただし、 $B_n$  は(15)式で定義している。さらに  $K_{n+2}$  として

TABLE IV. The table shows the results of computations in the method (IV).

○: good, △: slow, ×: impossible

angular freq.	mode $n$			
0.14544 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.21817 E-03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
0.14052 E-03	1	3	5	
	○	○	○	
	2	4	6	
0.199102E-06	1	3	5	
	○	○	×( $n=11$ )	
	2	4	6	
	○	○	○	

$$K_{n+2} = \frac{A_{n+2}}{L_{n+2} - K_{n+4}} \quad (16)$$

を用いる。これらの式を  $L_n - K_{n+2} - H_{n-2} = 0$  に代入して、整理すると

$$R_i^2 - (B_{n+2} - K_{n+2} + B_n - H_{n-2})R_i + (B_n - H_{n-2})(B_{n+2} - K_{n+4}) - A_{n+2} = 0 \quad (17)$$

となる。上の二次式(17)から逐次近似根  $R_i$  を求める。その際、 $L_i$ ,  $K_{n+4}$ ,  $H_{n-2}$  を計算する必要があるが、そのときには前の近似根を用いる。その計算結果は表で表している。ここで唯一求まらなかったケース、角振動数  $1.99102 \times 10^7 \text{sec}^{-1}$ 、モード  $n=5$  について、その原因は3. で述べられているが、このケースを除くと、非常に良い結果が得られている。この他に、 $K_{n+2}$  はそのままにして、 $H_{n-2}$  について

$$H_{n-2} = \frac{A_n}{L_{n-2} - H_{n-4}} \quad (18)$$

を用いて、同様な計算を行ったが、こちらの方は(16)よりうまく行かなかった。

## 7. 結 言

前の論文での結論の他に、continued fraction の

一様収束性について調べた。continued fractionの方法で、かつ内挿公式を用いて固有値を求める場合、近似計算の出発点となる最初の二つの近似値が非常に重要であることがわかった。また、この二つの近似値を求めるとき、continued fractionの項数を多く用いることが必ずしも良い結果を与えないこともわかった。さらに、計算方法 (I), (II), (III), (IV), (V) の中では方法 (II) が最も良いことがわかった。さらに、別の計算方法を 6. で示し、その中の 1 つの方法 (ii) で実際に計算を行った結果、非常に良いことがわかった。

#### 文 献

古賀雅夫・後藤信行・松島 晟(1991): Laplace の

Tidal equation (continued fraction による解の収束性について),

La mer, **29**, 62-66.

HOUGH, S. S.(1897): "On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, Part I," Phil. Trans. Roy. Soc. London, A189, p. 201.

HOUGH, S. S.(1898): "On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides, Part II," Phil. Trans. Roy. Soc. London, A191, p. 139.